Meccanica Razionale - 14.01.2020

Cognome e Nome ....

C. d. L.: .... Anno di Corso: 2 3 altro

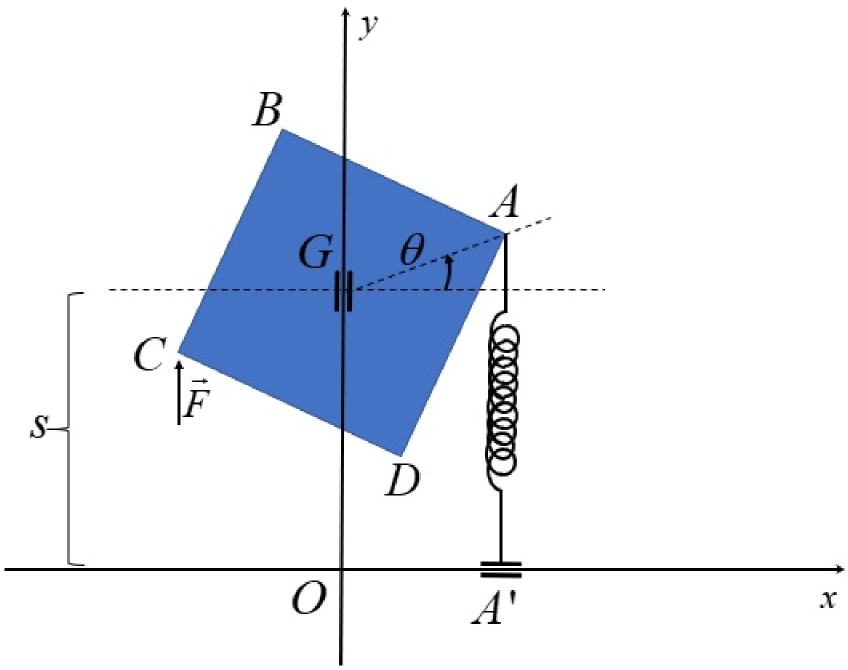
Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

Quesito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT
Punti										

Nel piano verticale Oxy si consideri una piastra quadrata ABCD, omogenea e pesante, di massa m e diagonale pari a 2ℓ, avente il baricentro G scorrevole sull'asse delle y. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una molla ideale, di costante elastica $k = 2mg/\ell$ che collega il vertice A con la sua proiezione A' sull'asse delle x, ed una forza costante $\vec{F} = 3mg\hat{\jmath}$, dove $\hat{\jmath}$ è il versore dell'asse delle y, applicata al vertice C. Scelti come parametri lagrangiani l'angolo θ che la congiungente il vertce A ed il baricentro G forma con l'asse delle x e l'ordinata s del baricentro (si veda figura), e considerando i vincoli lisci, si chiede



1. Determinare le coordinate dei vertici e del baricentro della piastra e della proiezione A' in funzione dei parametri lagrangiani. [PUNTI 2]

$A - O = (\ell\cos(\theta), s + \ell\sin(\theta)); B - O = (-\ell\sin(\theta), s + \ell\cos(\theta)); C - O = (-\ell\cos(\theta), s - \ell\sin(\theta));$ $D - O = (\ell\sin(\theta), s - \ell\cos(\theta)); A' - O = (\ell\cos(\theta), 0).$

2. Determinare la funzione potenziale U di tutte le forze attive agenti sul sistema. [PUNTI 4]

$U = 2mgs - 3mg\ell\sin(\theta) - \frac{mg}{\ell}\left(s + \ell\sin(\theta)\right)^2 + cost.$

3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema. [PUNTI 4]

$(s_1, \theta_1) = (0, \pi/2); (s_1, \theta_1) = (2\ell, 3\pi/2).$

4. Determinare la reazione vincolare nelle configurazioni di equilibrio. [PUNTI 4]

$\vec{\phi}_G = \vec{0}.$

5. Scrivere l'energia cinetica del sistema. [PUNTI 4]

$T = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3}\ell^2\dot{\theta}^2\right)$

6. Calcolare il momento della quantità di moto del sistema rispetto al polo O. [PUNTI 4]

$\vec{K}_O = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}\hat{i}_3$

7. Determinare la quantità di moto del sistema. [PUNTI 4]

$\vec{Q} = (0, m\dot{s}).$

8. Determinare un integrale primo del moto. [PUNTI 2]

$E = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3}\ell^2\dot{\theta}^2\right) - 2mgs + 2mg\ell\sin(\theta) + \frac{mg}{\ell}\left(s + \ell\sin(\theta)\right)^2$

9. Scrivere la funzione lagrangiana e trovare le equazioni differenziali del moto. [PUNTI 4]

$\mathcal{L} = T + U$
$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{\ell}\cos(\theta)(3 + 2\frac{s}{\ell} + 2\sin(\theta)), \ddot{s} = 2g\left(1 - \frac{s}{\ell} - \sin(\theta)\right)$